空间形式中平均曲率与纯量曲率成线性关系的紧致闭子流形*

王 琪
（贵阳学院数学系，贵州 贵阳 550005）

摘 要：研究空间形式 $S^{n+p}(1)$ 中平均曲率与纯量曲率成线性关系的 n 维紧致闭子流形 M^n，所得定理A将有关文献中关于常纯量曲率的子流形的脐性结果推广到了平均曲率与纯量曲率成一般线性关系的子流形。

关键词：紧致闭；子流形；平均曲率；纯量曲率；全脐性质；空间形式
中图分类号：O186.17 **文献标志码**：A **文章编号**：0529-6579（2012）06-0021-04

Compact Closed Sub-Manifolds of Mean Curvature and Scalar Curvature Having Linear Relationship in a Space Form

WANG Qi
(Department of Mathematics, Guiyang University, Guiyang 550005, China)

Abstract: N-dimensional compact closed sub-manifolds M^n of mean curvature and scalar curvature having linear relationship in the space form $S^{n+p}(1)$ are studied. The Theorem A generalizes the totally umbilical resolute of sub-manifolds of constant scalar curvature to sub-manifolds of mean curvature and scalar curvature having linear relationship.

Key words: compact closed; sub-manifold; mean curvature; scalar curvature; totally umbilical property; space form

文［1］首先研究了正曲率空间形式中紧致闭子流形为全脐或有全脐乘积分解的一种充分条件。随后，文［2-3］也对此作了研究。近来，文［4］给出的下列定理1，改进了文［1-2］的结论。

本文进一步得到如下定理A。定理A推广并改进了定理1。

定理1[4] 设 M^n 是空间形式 $S^{n+p}(1)$ 中紧致的闭子流形且单位平均曲率向量在法丛中平行。若 M^n 有常数纯量曲率 R 而且

$$R > n(n-1)$$

则有如下结论：

(i) $n \geqslant 8, p \geqslant 1$ 时，或者 $n \geqslant 3, p \leqslant 2$ 时，如果 M^n 的第二基本型模长平方 S 满足

$$S \leqslant 2\sqrt{n-1}$$

那么或者 $M^n = S^n \subset S^{n+p}(1)$，或者 $M^n = S^{n-1} \times S^1 \subset S^{n+1}(1) \subset S^{n+p}(1)$。

(ii) 当 $3 \leqslant n \leqslant 7$ 时，如果 $S \leqslant \frac{2}{3}n$，则 $M^n = S^n \subset S^{n+p}(1)$。

(iii) 当 $n=2, p \leqslant 2$ 时，如果 $S \leqslant 2+4H^2$，则 $M^2 = S^2 \subset S^3(1)$；又当 $n=2, p \geqslant 3$ 时，若 $S \leqslant \frac{2}{3}(2+5H^2)$，则 M^n 是 $S^4 \subset S^{n+p}(1)$ 中 Veronese 曲面。

定理A 设 M^n 是空间形式 $S^{n+p}(1)$ 中紧致的闭子流形且单位平均曲率向量在法丛中平行。设 M^n 的纯量曲率 R 与平均曲率 H 在 M^n 上成一般线性关系 $aR + bH = c$，其中 a, b, c 为常数且 a, b 不同时

* 收稿日期：2012-04-06
基金项目：贵州省教育厅一般课题资助项目（黔教科2009069）
作者简介：王琪（1963年生），男，副教授；E-mail：wangqihn@126.com

为零，又当 $a \neq 0$ 时要求

$$\frac{c}{a} \geqslant n(n-1)$$

则也有定理 1 中的结论（i）、（ii）和（iii）。

1 准备知识和若干引理

设 M^n 是等距浸入空间形式 $S^{n+1}(\tilde{c})$ 中 n 维子流形，约定指标范围为

$$1 \leqslant i,j,k,l,m \leqslant n, n+1 \leqslant \alpha,\beta,\gamma \leqslant n+p$$

选取 $S^{n+p}(\tilde{c})$ 的幺正局部标架场 $\{e_A\}(1 \leqslant A \leqslant n+p)$ 使得限制于 M^n 时 $\{e_i\}$ 切于 M^n，而 $\{e_\alpha\}$ 是 M^n 的法标架场，$\{\omega_A\}(1 \leqslant A \leqslant n+p)$ 是 $\{e_A\}(1 \leqslant A \leqslant n+p)$ 的对偶标架场。M^n 的第二基本形式为（文［1－3］）

$$\sigma = \sum_{\alpha ij} h_{ij}^{\alpha}\omega_i \otimes \omega_j \otimes e_\alpha$$

其中 $h_{ij}^{\alpha} = h_{ji}^{\alpha}$。

记 $L_\alpha = (h_{ij}^{\alpha})_{n\times n}, H_\alpha = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^{\alpha}$，则 M^n 的平均曲率向量 ξ，平均曲率 H 及第二基本形模长平方分别为（文［1－3，5］）

$$\xi = \sum_\alpha H_\alpha e_\alpha, H = |\xi| = \Big(\sum_\alpha H_\alpha^2\Big)^{\frac{1}{2}}, S = \sum_{\alpha ij}(h_{ij}^{\alpha})^2$$

M^n 的黎曼曲率张量 R_{ijkl}，法曲率张量 $R_{\alpha\beta ij}$ 及纯量曲率 R 有如下关系（文［1－2］）

$$R_{ijkl} = \tilde{c}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum_\alpha (h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}),$$

$$R_{\alpha\beta kl} = \sum_m (h_{mk}^{\alpha}h_{ml}^{\beta} - h_{ml}^{\alpha}h_{mk}^{\beta}),$$

$$R = n(n-1)\tilde{c} + n^2H^2 - S \tag{1}$$

广义张量 $\{h_{ij}^{\alpha}\}$ 的广义一阶和二阶协变导数 $\{h_{ijk}^{\alpha}\}$，$\{h_{ijkl}^{\alpha}\}$ 分别为（文［1－3，5］）

$$\nabla h_{ij}^{\alpha} = \sum_k h_{ijk}^{\alpha}\omega_k = \mathrm{d}h_{ij}^{\alpha} + \sum_k h_{kj}^{\alpha}\omega_{ki} + \sum_k h_{ik}^{\alpha}\omega_{kj} + \sum_\beta h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta\alpha} \tag{2}$$

$$\nabla h_{ijk}^{\alpha} = \sum_l h_{ijkl}^{\alpha}\omega_l = \mathrm{d}h_{ijk}^{\alpha} + \sum_l h_{ljk}^{\alpha}\omega_{li} + \sum_l h_{ilk}^{\alpha}\omega_{lj} + \sum_l h_{ijl}^{\beta}\omega_{lk} + \sum_\beta h_{ijk}^{\beta}\omega_\beta \tag{3}$$

且有下列关系

$$h_{ijk}^{\alpha} - h_{ikj}^{\alpha} = 0, h_{ijkl}^{\alpha} - h_{ijlk}^{\alpha} = \sum_m h_{mi}^{\alpha}R_{mjkl} + \sum_m h_{mj}^{\alpha}R_{mikl} + \sum_\beta h_{ij}^{\beta}R_{\beta\alpha kl} \tag{4}$$

h_{ij}^{α} 的 Laplace 为（文［1－3，5］）

$$\Delta h_{ij}^{\alpha} = \sum_k h_{ijkk}^{\alpha}$$

而且有

$$\sum_{ij} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} = n\sum_{ij} H\alpha,ijh_{ij}^{\alpha} + n\tilde{c}S_\alpha - n\sum_\beta H_\beta \mathrm{tr}(L_\alpha^2 L_\beta) - \sum_\beta S_{\alpha\beta}^2 - \sum_\beta N(L_\alpha L_\beta - L_\beta L_\alpha) \tag{5}$$

我们需要考虑 M^n 上二阶微分算子 $\diamond$ 如下（文［1－3，5］）

$$\diamond f = \sum_{ij}(h_{ij}^{n+1} - nH\delta_{ij})f_{ij}, f \in C^\infty(M) \tag{6}$$

其中 f_{ij} 是 f 在 M^n 上的二阶协变微分。

为书写方便，分别定义 $\tilde{L}_{n+1}, \tilde{S}_{n+1}, \tilde{S}$ 如下

$$\tilde{L}_{n+1} = L_{n+1} - HI_n, \tilde{S}_{n+1} = \mathrm{tr}(\tilde{L}_{n+1}^2) = S_{n+1} - nH^2, \tilde{S} = \tilde{S}_{n+1} + S_I = S - nH^2$$

其中 $S_I = \sum_{\beta\neq n+1} S_\beta = \sum_{\beta\neq n+1} S_{\beta\beta} = \sum_{ij,\beta\neq n+1}(h_{ij}^{\beta})^2$，而 I_n 是 n 阶单位矩阵。

本文需要用如下几个基本引理。

引理 1[6,7] 若实数 $a_1,\cdots,a_n(n \geqslant 2)$ 满足 $\sum_i a_i = 0$，则

$$\Big|\sum_i a_i^3\Big| \leqslant \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\Big(\sum_i a_i^2\Big)^{3/2},$$

$$\sum_i a_i^4 \leqslant \frac{n^2-2n+3}{n(n-1)}\Big(\sum_i a_i^2\Big)^2$$

引理 2[6,8] 设 $A_{n+1},\cdots,A_{n+p}$ 是 p 个 $n\times n$ 矩阵。写

$$S_{\alpha\beta} = \mathrm{tr}(A_\alpha^{\mathrm{T}}A_\beta), S_\alpha = S_{\alpha\alpha}, S = \sum_\alpha S_\alpha$$

则有

$$\sum_{\alpha\beta} N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + \sum_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^2 \leqslant \Big(1 + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(p-1)\Big)S^2$$

引理 3[6] 若实数 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n(n \geqslant 2)$ 满足 $\sum_i a_i = 0$，则有

$$\sum_{ij} b_ib_j(a_i - a_j)^2 \geqslant -\frac{n}{\sqrt{n-1}}\Big(\sum_k a_k^2\Big)\Big(\sum_k b_k^2\Big)$$

引理 4 当 $n \geqslant 3$ 时，有

$$\sum_{ij} h_{ij}^{n+1}\Delta h_{ij}^{n+1} \geqslant n\diamond H + \frac{1}{2}n^2\Delta(H^2) - n^2|\nabla H|^2 + \tilde{S}_{n+1}\Big(n - \frac{n}{2\sqrt{n-1}}S\Big)$$

证明 首先由 Schwartz 不等式有

$$\sum_{\beta\neq n+1} S_{n+1\beta}^2 = \sum_{\beta\neq n+1}\Big\{\sum_{ij}(h_{ij}^{n+1} - H\delta_{ij})h_{ij}^{\beta}\Big\}^2 \leqslant \tilde{S}_{n+1}S_I$$

再由公式（5）和引理 3 即得。

引理 5 当 $n \geqslant 2$ 且 $p \geqslant 1$ 时，有

$$\sum_{ij,\alpha\neq n+1} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} \geqslant S_I\Big\{n - \frac{n}{2\sqrt{n-1}}S_{n+1} - \Big[1 + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(p-2)\Big]S_I\Big\}$$

证明　因平均曲率向量 $e_{n+1} = \dfrac{\xi}{H}$ 在法丛中平行，故对每个固定的 α 总有 $L_{n+1}L_\alpha = L_\alpha L_{n+1}$。于是可以选取 $\{e_i\}$ 使得 $h_{ij}^{n+1} = h_{ij}^{n+1}\delta_{ij}, h_{ij}^\alpha = h_{ij}^\alpha\delta_{ij}$。从而有

$$nH\mathrm{tr}(L_\alpha^2 L_{n+1}) - S_{n+1\alpha}^2 = \frac{1}{2}\sum_{ij} h_{ii}^{n+1}h_{jj}^\alpha(h_{ii}^\alpha - h_{jj}^\alpha)^2$$

将引理 2 和引理 3 用于上式即得。

引理 6　当 $n \geqslant 8$ 时，或当 $n \geqslant 3$ 且 $p \leqslant 2$ 时，有

$$\sum_{ij,\alpha\neq n+1} h_{ij}^\alpha \Delta h_{ij}^\alpha \geqslant S_I\left(n - \frac{n}{2\sqrt{n-1}}S\right)$$

证明　$p \leqslant 2$ 意味着诸 L_α 可以同时对角化，由此易得。

引理 7　当您 $n = 2, p \geqslant 1$ 时，有

$$\sum_{ij} h_{ij}^{n+1}\Delta h_{ij}^{n+1} \geqslant n\Diamond H + \frac{1}{2}n^2\Delta(H^2) - n^2|\nabla H|^2 + \tilde{S}_{n+1}(2 + 4H^2 - S)$$

证明 当 $n = 2$ 时，引理 5 的不等式右边第 4 项小括号中可以算出，即得。

引理 8[4]　设 M^n 常曲率黎曼流形 $\tilde{M}^{n+p}\tilde{c}$ 中连通子流形且 M^n 的平均曲率处处非零。如果 M^n 的纯量曲率 R 是常数且 $R \geqslant n(n-1)\tilde{c}$，则有

$$|\nabla\sigma|^2 = \sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2 \geqslant n^2|\nabla H|^2 \qquad (7)$$

并且有如下结论：

(i) 当 $R > n(n-1)\tilde{c}$ 时，如果（7）式在 M^n 上恒取等号，则 H 为常数。

(ii) 当 $R = n(n-1)\tilde{c}$ 时，如果（7）式在 M^n 上恒取等号，则或者 H 为常数，或者 M^n 落在 $\tilde{M}^{n+p}\tilde{c}$ 的某个全测地子流形 $\tilde{M}^{n+1}\tilde{c}$ 中。在后一情况下，若 H 不为常数，则必有 $\mathrm{rank}(L_{n+1}) = 1$。

引理 9　设 M^n 常曲率黎曼流形 $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ 中连通子流形且 M^n 的平均曲率处处非零且 M^n 的纯量曲率 R 与平均曲率 H 在 M^n 上成一般线性关系

$$aR + bH = c$$

其中 a,b,c 为常数且 a,b 不同时为零，而当 $a \neq 0$ 要求 $\dfrac{c}{a} \geqslant n(n-1)\tilde{c}$。

则（7）式必成立，并且若（7）式在 M^n 上恒为等式，则此时或者 H 为常数，或者 M^n 落在 $\tilde{M}^{n+p}\tilde{c}$ 的某个全测地子流形 $\tilde{M}^{n+1}\tilde{c}$ 中且 $\mathrm{rank}(L_{n+1}) = 1$。

证明　首先，$R = n(n-1)\tilde{c} + n^2H^2 - |\sigma|^2$ 以及 $aR + bH = c$，两式各取协变微分就有

$$\left(\frac{b}{a} + 2n^2H\right)\nabla H = \nabla|\sigma|^2 = 2\sum_{\alpha ijk} h_{ij}^\alpha h_{ijk}^\alpha \omega_k \qquad (8)$$

现在，（8）式两边取摸长平方并用 Schwartz 不等式，可得

$$\left(\frac{b^2}{4a^2} + n^2\frac{b}{a}H + n^4H^2\right)|\nabla H|^2 = \sum_k\left(\sum_{\alpha ij} h_{ij}^\alpha h_{ijk}^\alpha\right)^2 \leqslant |\sigma|^2\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2 = S|\nabla\sigma|^2 \qquad (9)$$

从（9）式并注意 $aR + bH = c$，就得

$$S\left\{\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2 - n^2|\nabla H|^2\right\} \geqslant \left\{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{b}{a}n^2 + n^2[n^2H^2 - S]\right\}|\nabla H|^2 = \left\{\frac{b^2}{4a^2} + n^2\left[\frac{c}{a} - n(n-1)\tilde{c}\right]\right\}|\nabla H|^2 \qquad (10)$$

注意到 $H \neq 0$，在 M^n 上处处成立，于是 $S > 0$ 在 M^n 上处处成立。再注意条件 $\dfrac{c}{a} - n(n-1)\tilde{c} \geqslant 0$，如果 $b \neq 0$ 且（6）式在 M^n 上恒为等式，由（10）式，在 M^n 上恒有 $|\nabla H|^2 = 0$，从而 H 为常数；如果 $b = 0$，则 $a \neq 0$ 且 $R = \dfrac{c}{a}$ 为常数而 $R \geqslant n(n-1)\tilde{c}$，于是从引理 8 即得结论。

2　定理 A 的证明

首先，（7）式两边取模长平方再用 Schwartz 不定式，得

$$\left(\frac{b^2}{4a^2} + n^2\frac{b}{a}(H + n^4)H^2\right)|\nabla H|^2 = \sum_k\left(\sum_{\alpha ij} h_{ij}^\alpha h_{ijk}^\alpha\right)^2 \leqslant |\sigma|^2\sum_{\alpha ij}(h_{ijk}^\alpha)^2 = S|\nabla\sigma|^2 \qquad (11)$$

由（10）式并注意 $aR + bH = c$，得

$$S\{|\nabla\sigma|^2 - n^2|\nabla H|^2\} \geqslant \left\{\frac{b^2}{4a^2} + n^2\left[\frac{c}{a} - n(n-1)\right]\right\}|\nabla H|^2 \qquad (12)$$

由（12）式及条件 $\dfrac{c}{a} - n(n-1) \geqslant 0$ 即有

$$|\nabla\sigma|^2 - n^2|\nabla H|^2 \geqslant 0 \qquad (13)$$

以下分几种情况讨论：

① 当 $n \geqslant 8, p \geqslant 1$ 时，或当 $n \geqslant 3, p \leqslant 2$ 时，由引理 4 和引理 5 得

$$\frac{1}{2}\Delta S = |\nabla\sigma|^2 + \sum_{ij} h_{ij}^{n+1}\Delta h_{ij}^{n+1} + \sum_{ij,\alpha\neq n+1} h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha \geqslant n\Diamond H + \frac{1}{2}n^2\Delta(H^2) + [|\nabla\sigma|^2 - n^2|\nabla H|^2] + \tilde{S}\left(n - \frac{n}{2\sqrt{n-1}}S\right) \qquad (14)$$

注意到恒等式 $\frac{1}{2}\Delta S = \frac{1}{2}n^2\Delta(H^2) - \frac{1}{2}\Delta R = \frac{1}{2}n^2\Delta(H^2) + \frac{b}{2a}\Delta H$, 公式（14）即为

$$nL(H)\geqslant\{|\nabla\sigma|^2 - n^2|\nabla H|^2\} + \tilde{S}\left(n - \frac{n}{2\sqrt{n-1}}S\right) \tag{15}$$

其中二阶微分算子 $L = \frac{b}{2na}\Delta - \Diamond$，而 $\Diamond$ 即是上节公式（6）中定义的微分算子。

因 $S \leqslant 2\sqrt{n-1}$，由公式（15）知 $L(H) \geqslant 0$ 在 M^n 上恒成立。由于 M^n 为紧致闭的[1-3]，有 $\int_M L(H)\,\mathrm{d}M = 0$。

再由引理 8 知 $H > 0$ 在 M^n 上为常数，从而又由式（14）知只有两种可能，即

$$\tilde{S} \equiv 0 \text{ 或 } S \equiv 2\sqrt{n-1}$$

第一种情况说明 $S_I \equiv 0, S_{n+1} \equiv nH^2$ 并且有

$$M^n = S^n \subset S^{n+1}(1) \subset S^{n+p}(1)$$

第二种情况 $S \equiv 2\sqrt{n-1}$ 下，由引理 1 和引理 4 中不等式事实上均为等式，从而也得结论。

② 当 $3 \leqslant n \leqslant 7$ 时，由引理 3 和引理 4 得

$$nL(H) \geqslant \tilde{S}\left(n - \frac{3}{2}S\right) + \{|\nabla\sigma|^2 - n^2|\nabla H|^2\} \tag{16}$$

因为 $S \leqslant \frac{2}{3}n$，（16）式两边积分，引理 9 给出 $H > 0$ 为常数，与①中同样知

$$M^2 = S^2 \subset S^3(1) \subset S^{2+p}(1)$$

并且从引理 4 知此时 $S \equiv \frac{2}{3}n$ 不会发生。

③ 当 $n = 2, p = 2$ 时，由引理 9 得

$$nL(H) \geqslant \{|\nabla\sigma|^2 - n^2|\nabla H|^2\} + \tilde{S}(2 + 4H^2 - S) \tag{17}$$

因为 $S \leqslant 2 + 4H^2$ 和公式（17）及 $\int_M L(H)\,\mathrm{d}M = 0$ 知 $H > 0$ 为常数，故或者 $\tilde{S} \equiv 0$ 或者 $S \equiv 2 + 4H^2$，由文［1］有 $M^2 = S^2$。

④ 当 $n = 2, p \geqslant 3$ 时，由引理 6 和引理 7 得

$$nL(H) \geqslant \{|\nabla\sigma|^2 - n^2|\nabla H|^2\} + \tilde{S}\left(2 + 5H^2 - \frac{3}{2}S\right) \tag{18}$$

因为 $S \leqslant \frac{2}{3}(2 + 5H^2)$，由于 $\int_M L(H)\,\mathrm{d}M = 0$ 和公式（18），故 $H > 0$ 在 M^n 上为常数。此时从 $\tilde{S} \equiv 0$ 推知 $M^n = S^n \subset S^{n+1}(1) \subset S^{n+p}(1)$；或从 $S \equiv \frac{2}{3}(2 + 5H^2)$ 及文［1］推知 $M^n = M^2$ 是 Veronese 曲面。

致谢 作者衷心感谢编辑和审稿专家提出的极有价值的意见！

参考文献：

［1］ YAU S T. Sub-manifolds with parallel mean curvature I, II［J］. Amer J Math, I, 1974, 96(2): 346－366; II, 1975, 97(1):76－100.

［2］ SHEN Y B. Sub-manifolds with nonnegative sectional curvature［J］. China Ann Math, 1984, 5B (4):625－632.

［3］ 林森春. 纯量曲率和平均曲率成线性关系的完备超曲面［J］. 数学年刊,1989, 10A(3): 333－344.

［4］ ZHONG H H. Sub-manifolds of constant scalar curvature in a space form［J］. KYUNGPOOK Math J, 1998 (38):438－458.

［5］ HONG W X. On closed minimal sub-manifolds in pinched Riemannian manifolds［J］. Transactions of the American mathematical society, 1995, 347(5): 1743－1751.

［6］ LI A M, LI J M. An intrinsic rigidity theorem for minimal sub-manifolds in a sphere, Ark Math, 1992, 58: 582－594.

［7］ LI H Z. Global rigidity theorems of hyper-surfaces［J］. Ark Math, 1997, 35: 327－351.

［8］ SUNG EUN KOH. A characterization of round spheres［C］// Proc Amer Math Soc, 1998, 126: 3657－3660.